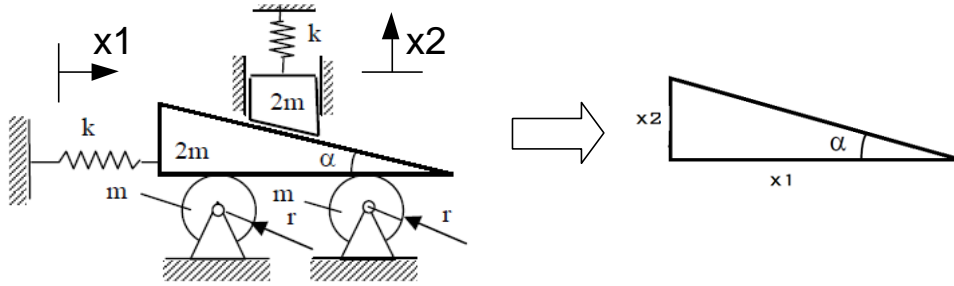


## MAKİNA TEORİSİ ÖDEV 3

### A) Problemlerin Yanıtları

1) Birinci soruda verilen sistem statik denge konumunda kabul edilsin. Buna göre sistem geometrisinden aşağıdaki Şekil 1 elde edilebilir.



Şekil 1

Şekil 1'e göre ve kaymadan yuvarlanma esasına göre elde edilebilecek eşitlikler şöyle sıralanabilir:

$$x_2 = x_1 \tan \alpha \text{ ve } \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan \alpha$$

$$\theta = \frac{x_1}{r} \text{ ve } \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_1}{r}$$

Ardından sisteme ilişkin kinetik ve potansiyel enerji denklemleri aracılığı ile sisteme ilişkin yay katsayısı  $k_{es}$  ve eşdeğer kütle  $m_{es}$  bulunabilir:

Kinetik enerji denklemi hesabı şöyle yapılır:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m r^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} (2m \dot{x}_1^2 + 2m \dot{x}_1^2 \tan^2 \alpha + m \dot{x}_1^2)$$

$$T = \frac{1}{2} (2m + 2m \tan^2 \alpha + m) \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} m_{es} \dot{x}_1^2$$

$$m_{es} = 3m + 2m \tan^2 \alpha$$

Potansiyel enerji denklemi hesabı şöyle yapılır:

$$V = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 \tan^2 \alpha$$

$$V = \frac{1}{2} (k + k \tan^2 \alpha) x_1^2 = \frac{1}{2} k_{es} x_1^2$$

$$k_{es} = k + k \tan^2 \alpha$$

Sisteme ilişkin doğan frekans ifadesi ise şöyle bulunur:

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{es}}{m_{es}}} = \sqrt{\frac{k + k \tan^2 \alpha}{3m + 2m \tan^2 \alpha}}$$

Bu ifadeye ilişkin soruda verilen sayısal değerlerin yerine konulması ile “Mathematica”da elde edilen çözüm şu şekildedir:

$$m = 2$$

$$k = 720$$

$$\alpha = 45 \frac{2 \pi}{360}$$

$$m1 = 2 m$$

$$m2 = 2 m$$

$$k1 = k$$

$$k2 = k$$

$$k_{es} = k1 + k2 (\tan[\alpha])^2$$

$$1440$$

$$m_{es} = 2 m \left( \frac{3}{2} + (\tan[\alpha])^2 \right)$$

$$10$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{es}}{m_{es}}}$$

$$12$$

Sayısal değerler bu şekilde verildiğinde sistemin doğan frekansı  $w_n, 12 \text{ rad/s}$  çıkmaktadır.

2) Soru 2’de verilene göre sistemin eşdeğeri, kütle, sönüm elemanı ve yaydan oluşacaktır. Bu durumda sisteme ilişkin modelin hareket denklemi şu hali alır:

$$m_{eş} \ddot{x} + r_{eş} \dot{x} + k_{eş} x = 0$$

Sistemde yer alan çelik konsol kirişin de bir yay gibi temsil edilmesi gerekmektedir. Buna göre öncelikle böyle bir konsol girişe ilişkin yay katsayısı bulunmalıdır. “l” uzunluğundaki konsol kirişin “l” koordinatına kütle yerleştirildiğinde, bu konsol kirişin yay katsayısı  $k_{kiriş} = \frac{3EI}{l^3}$  ’tür (Turhan, 1998, sf. 43).

Bu sisteme ilişkin eşdeğer yay katsayısı şöyle bulunabilir:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k_{kiriş} x^2 = \frac{1}{2} k_{eş} x_1^2$$

$$k_{eş} = k + k_{kiriş} = k + \frac{3EI}{l^3}$$

Sisteme ilişkin eşdeğer kütle hesabı ise şu şekildedir:

Konsol kirişin z koordinatının eğri denklemi şöyledir:

$$\text{In[2]:= } yz = \frac{F l^3}{3 E_y I_y} \left( \frac{3 z^2}{2 l^2} - \frac{z^3}{2 l^3} \right)$$

“z” koordinatının “l”ye eşit olması durumunda denklem şu hale gelir:

$$\text{In[3]:= } y1 = yz /. z -> l$$

$$\text{Out[3]= } \frac{F l^3}{3 E_y I_y}$$

Konsol kirişin kütlelerinin o noktaya etkisini veren  $\alpha$  katsayısı ise Mathematica yardımı ile şöyle bulunur:

$$\text{In[5]:= } \alpha = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{yz}{y1} \right)^2 dz$$

$$\text{Out[5]= } \frac{33}{140}$$

Bu durumda sisteme ilişkin eşdeğer kütle şuna eşit olur:

$$m_{eş} = M + \alpha m_{kiriş} = M + \frac{33}{140} m$$

Sönüm elemanının değerini bulmak amacı ile verilen  $\xi = 0.005$  (zayıf sönüm) kullanılır. Mathematica yardımı ile hesap şu şekilde yapılır:

$$\begin{array}{ll} M = 63.7 & keş = \frac{3 E_y I_y}{l^3} + k \\ m = 154 & 90000. \\ I_y = 3.6 \cdot 10^{-6} & meş = M + \frac{33}{140} m \\ l = 3 & 100. \\ k = 5640 & \xi = 0.005 \\ E_y = 2.109 \cdot 10^{11} & reş = 2 \xi \sqrt{keş meş} \\ & 30. \end{array}$$

Böylece sönüm elemanının  $r_{eş} = 30$  kg/s olduğu anlaşılır.

Buradan titreşim hareketini veren  $x(t)$  ifadesi kolaylıkla bulunabilir:

$$\begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{keş}{meş}} \\ 30. \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ 29.9996 \\ \delta = \xi \omega_n \\ 0.15 \end{array}$$

Zayıf sönüm çözümünden  $x(t)$  hareketi aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$\begin{array}{l} x(t) = X e^{-\delta t} \cos [\omega_d t - \psi] \\ e^{-0.15 t} X \cos [29.9996 t - \psi] \end{array}$$

Burada faz farkı ve genlik ancak başlangıç koşullarının verilmesi ile bulunabilir. Soruda verilmemiş ama başlangıç koşullarını geçici olarak aşağıdaki gibi kabul edilirse titreşim hareketinin zamanla değişimi elde edilebilir. Bu sonuç şekil 2’de verilmiştir.

$$x_0 = 0.01 \text{ olsun}$$

$$v_0 = 0.01 \text{ olsun}$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta x_0 + v_0}{\omega d}\right)^2}$$

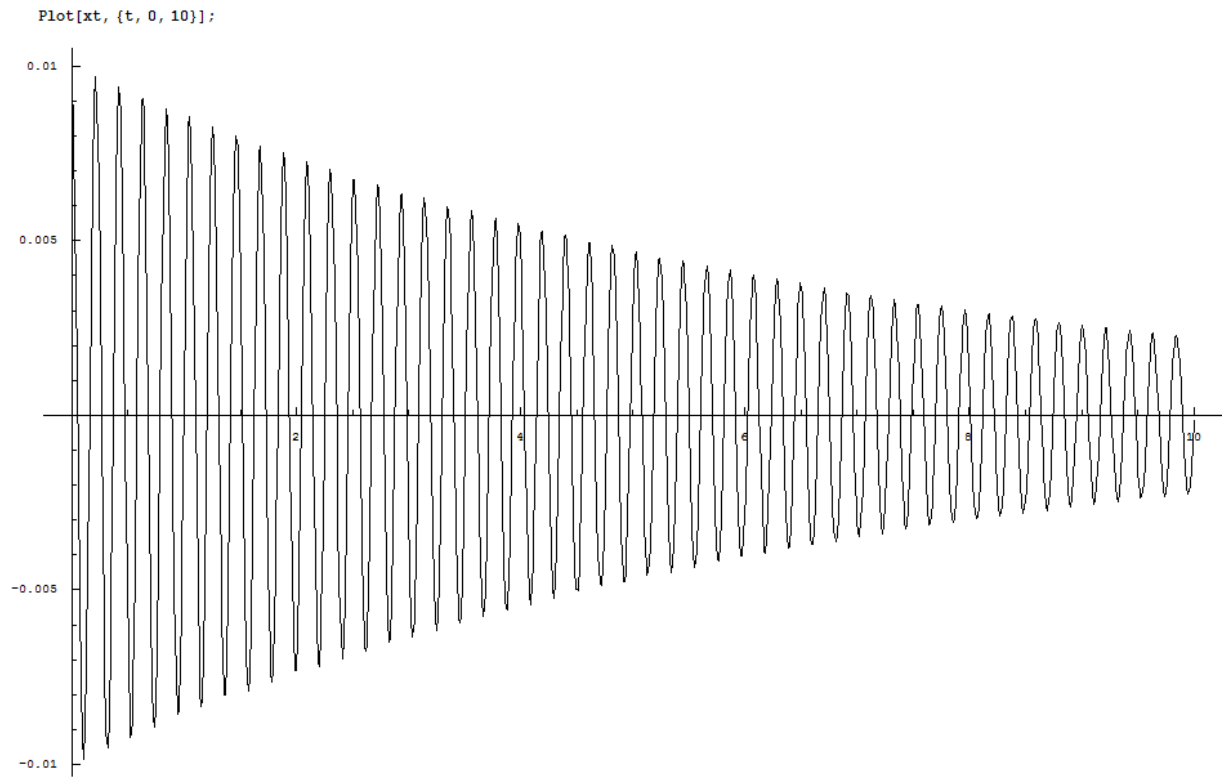
$$0.0100073$$

$$\psi = \text{ArcTan}\left[\frac{\delta x_0 + v_0}{x_0 \omega d}\right]$$

$$0.0383151$$

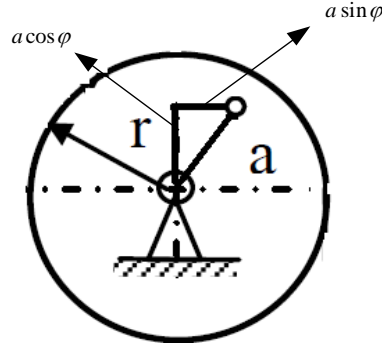
$$x(t) = X e^{-\delta t} \cos[\omega d t - \psi]$$

$$0.0100073 e^{-0.15 t} \cos[0.0383151 - 29.9996 t]$$



Şekil 2

3) Verilen sisteme göre sistemin saat yönünde  $\varphi$  kadar dönmesi ile k yayı  $a \sin \varphi$  kadar uzayacaktır. Buna karşın k yayının moment kolu  $a \cos \varphi$  olacaktır. Bu durumun diyagramı Şekil 3'te görülebilir:



Şekil 3

Buna göre bu sistemin hareket denklemi şu ifade temel alınarak yazılabilir:

$$I_o \ddot{\varphi} = M_o$$

Dairenin merkezi olan o noktasına göre eylemsizlik momenti ve bu noktaya etkiyen momentler yazılıp eşitlenmelidir.

O noktasına etkiyen momentler toplamı şöyledir:

$$M_o = -mgr - k(a \sin \varphi)(a \cos \varphi)$$

O noktasına göre eylemsizlik momenti ise aşağıda verilmiştir:

$$I_o = \frac{1}{2} Mr^2$$

İfadeler,  $I_o \ddot{\varphi} = M_o$  eşitliğinde yerine konularak çözümlerse sisteme ilişkin doğal frekans bulunabilir:

$$\frac{1}{2} Mr^2 \ddot{\varphi} + mgr + ka^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad \text{Denklem 1}$$

Küçük genlikli titreşimler için denklemdaki trigonometrik ifadeler belirli yaklaşıklıklarla ortadan kaldırılabilir:

$$f(\varphi) = mgr + ka^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$\varphi$  'ye bağı bu fonksiyon için MacLaurin serisinin ilk iki terimi ele alınsın. Birinci terim  $f(0)$ , statik denge konumunu belirttiği için sifıra eşit olur. Dolayısıyla fonksiyon şu ifadeye yaklaşık eşit olur:

$$f(\varphi) = \left. \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi$$

Türev alınıp yerine konduğunda küçük genlikli titreşimlerde şu eşitlik sağlanabilir:

$$f(\varphi) = \left. \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi = ka^2 [\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] \Big|_{\varphi=0} \varphi$$
$$f(\varphi) = ka^2 \varphi$$

Buna göre Denklem 1 şu hale gelir:

$$\frac{1}{2} Mr^2 \ddot{\varphi} + ka^2 \varphi = 0$$

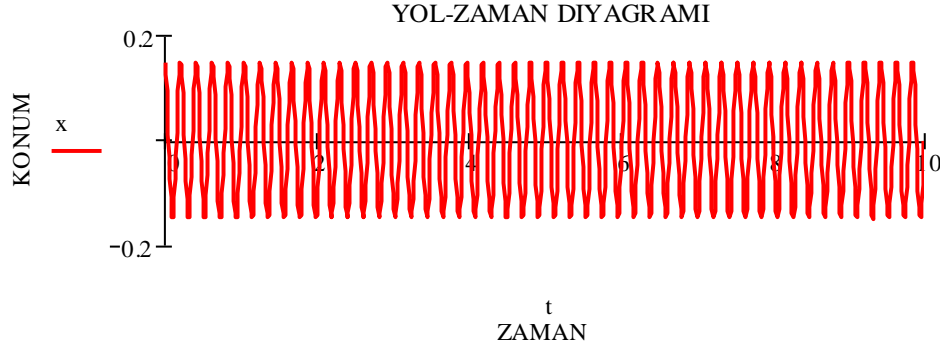
Buradan sistemin  $k_{eş}$  ve  $m_{eş}$  ifadeleri ve doğal frekansı bulunur:

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eş}}{m_{eş}}} = \sqrt{\frac{ka^2}{\frac{1}{2} Mr^2}} = \sqrt{2 \frac{ka^2}{Mr^2}}$$





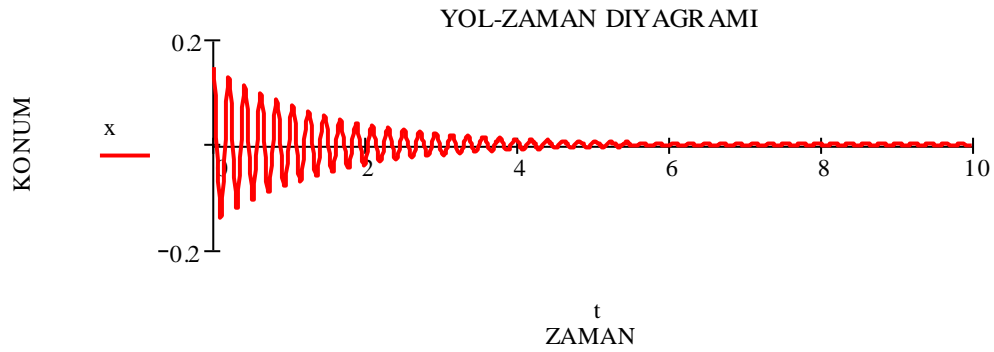
a) 1)  $r=0, F_0=0$



Şekil 4

$m = 3\text{kg}$ ,  $k = 2700\text{ N/m}$ ,  $r = 0, F_0 = 0$  verileri ışığında, sistemin sönümsüz serbest titreşim yapacağı açıktır. Bu durumda sistem  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2700}{3}} = 30\text{rad/s}$  doğal frekansı ile titreşim hareketi yapacaktır. Şekil 4 tam olarak bunu ortaya koymaktadır.

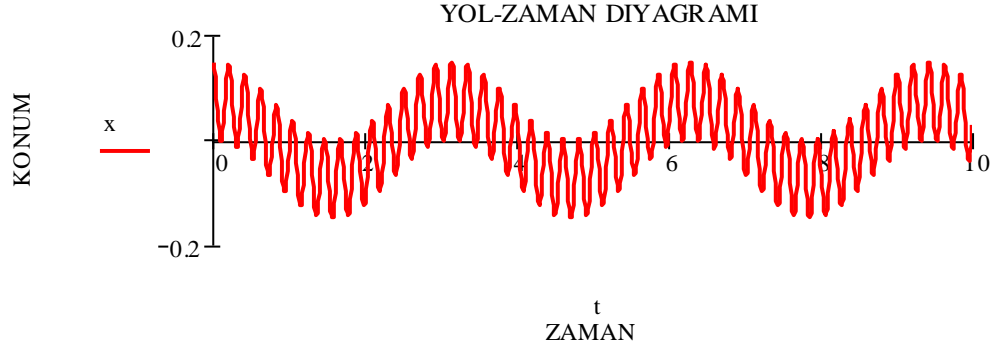
a) 2)  $r = 4\text{ kg/s}$ ,  $F_0 = 0$



Şekil 5

$m = 3\text{kg}$ ,  $k = 2700\text{ N/m}$ ,  $r = 4\text{ kg/s}$ ,  $F_0 = 0$  verileri altında sistem, sönümlü serbest titreşim hareketi yapar. Bu durumda sistemin sönüm faktörü  $\xi = \frac{r}{2\sqrt{k m}} = \frac{4}{2\sqrt{2700 \times 3}} = 0.0222222$  çıkacaktır.  $\xi < 1$  olduğuna göre sistem zayıf sönüm yapacaktır. Bu sonuç Şekil 5'te açıkça görülmektedir.

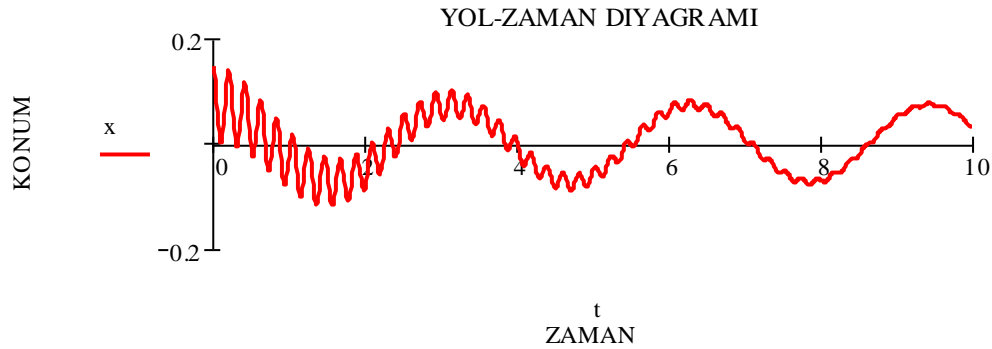
a) 3)  $r=0, F_0=200, w=2$  rad/s



Şekil 6

$m = 3\text{kg}$ ,  $k=2700$  N/m,  $r=0, F_0=200$ ,  $w=2$  rad/s verilerine göre sistem sönümsüz zorlanmış titreşim hareketi yapar. Burada sönüm sıfır olduğu için genel çözümde bulunan eksponansiyel ifade, trigonometrik ifadeyi sıfıra götüremeyeceğinden  $w_d$  ve  $w$  frekanslarında iki ifadenin toplamı şeklinde bir titreşim hareketi oluşur. Şekil 6’da bu durum doğrulanmıştır.

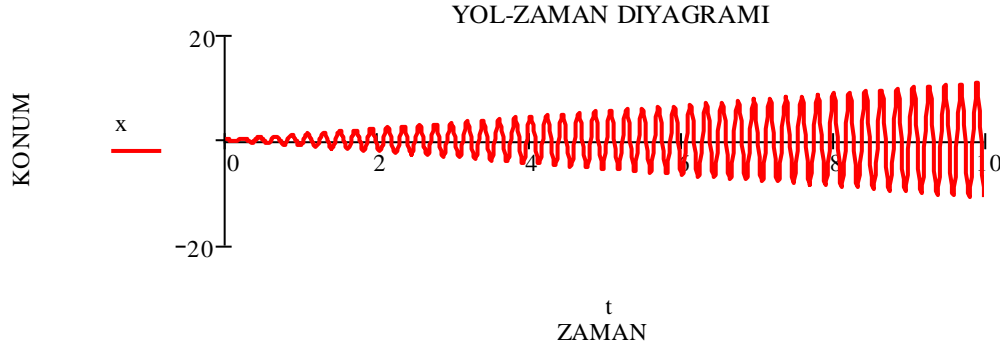
a) 4)  $r=2$  kg/s,  $F_0=200$  N,  $\omega=2$  rad/s



Şekil 7

$m = 3\text{kg}$ ,  $k=2700$  N/m,  $r=2$  kg/s,  $F_0=200$  N,  $\omega=2$  rad/s verilerine göre sistem sönümlü, zorlanmış titreşim hareketi yapar. Sistemde sönüm olduğundan homojen çözümün eksponansiyel katsayısı negatif olur ve zamanla homojen çözümü sıfıra götürür, ancak partiküler çözüm  $w$  frekansında harmonik hareketini yapmaya devam eder. Şekil 7’de tam olarak bu durum görülmektedir. Üst üste binmiş iki harmonik hareketten biri zamanda sıfıra giderken diğeri periyodik hareketini sürdürmüştür.

a) 5)  $r=0$ ,  $F_0=200$  N,  $\omega=30$  rad/s



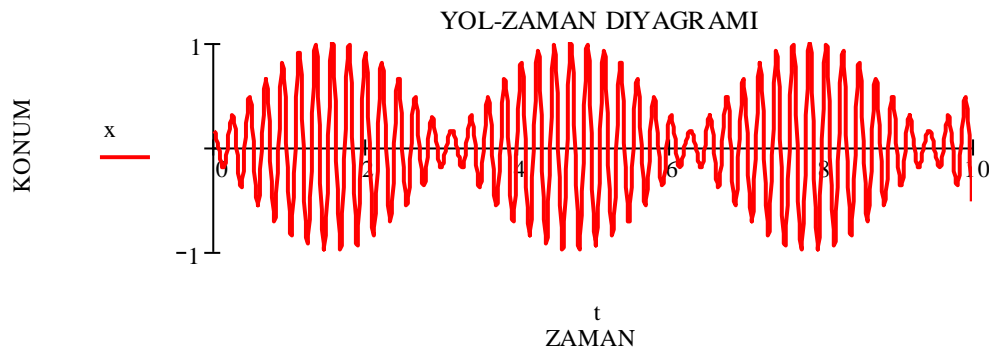
Şekil 8

$m = 3$  kg,  $k = 2700$  N/m,  $r = 0$ ,  $F_0 = 200$  N,  $\omega = 30$  rad/s verilerine göre sistem sönümsüz zorlanmış titreşim hareketi yapmaktadır. Bu hareketin sonuçları oldukça önemlidir. Çünkü

sistemin doğal frekansı  $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2700}{3}} = 30$  rad/s ile zorlayıcı kuvvetin frekansı aynıdır.

Sönümsüz bir sistem, kendi doğal frekansına eşit frekansta zorlandığında, zorlanmış titreşim genliği sonsuza gider. Bu olaya rezonans denir. Şekil 8’de rezonansa giden bir sistemin grafiği görülmektedir. Gerçektende grafik 10s’nin de ötesinde çizildiğinde genliğin çok çok büyüdüğü kolaylıkla görülebilir.

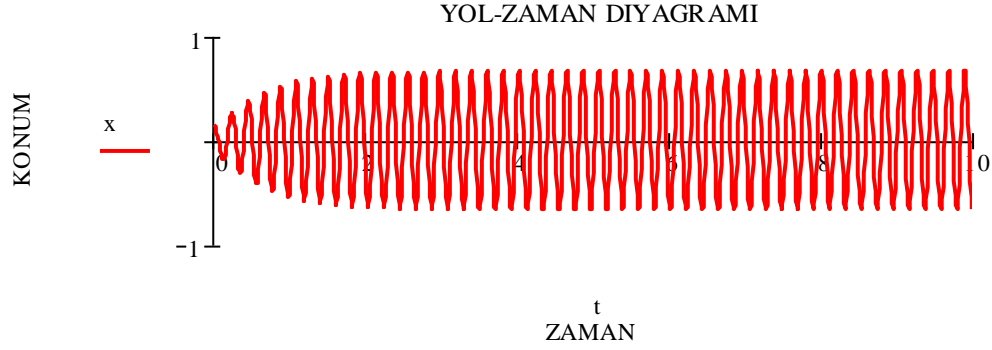
a) 6)  $r=0$ ,  $F_0=200$  N,  $\omega=28$  rad/s



Şekil 9

$m = 3$  kg,  $k = 2700$  N/m,  $r = 0$ ,  $F_0 = 200$  N,  $\omega = 28$  rad/s verilerinde sistem sönümsüz zorlanmış titreşim hareketi yapar. Bu hareketin önemli bir özelliği, zorlayıcı kuvvetin frekansındır. Bu frekans sistemin doğal frekansına çok yakın olduğundan genlik tehlikeli noktalara çıkabilir. Bu olaya vuru olayı da denir. Şekil 9’da bu olayın görüntüsü görülmektedir.

a) 7)  $r=10$  kg/s,  $F_0=200$  N,  $\omega=30$  rad/s



Şekil 10

$m = 3$  kg,  $k = 2700$  N/m,  $r = 10$  kg/s,  $F_0 = 200$  N,  $\omega = 30$  rad/s verilerinde sistem sönümlü, zorlanmış titreşim hareketi yapar. Bu durumda sistem doğal frekansında zorlanmaktadır. Ancak sönüm elemanından dolayı sistemin  $\omega_d$  ile titreşim yapan kısmının etkisi zamanla kaybolur. Bununla birlikte sistem  $\omega$  frekansı ile titreşmeye devam eder. Şekil 10'da böyle hareket yapan sistemin yol zaman diyagramı görülmektedir.

### C) İnternet Araştırması

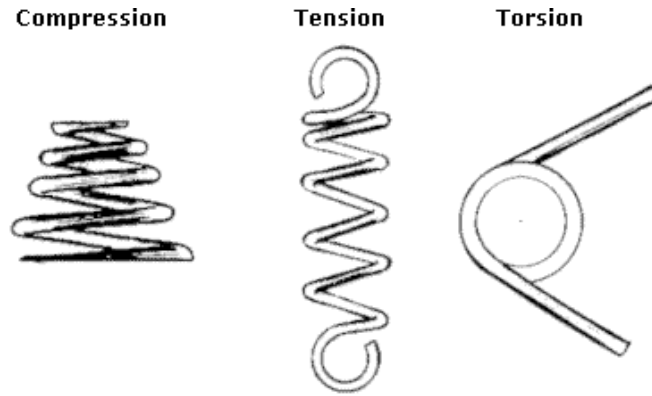
#### a) Mekanik Yaylar

Mekanik yaylar, mekanik elemanların en temelidir. Şeklinin değiştirilmesine bir direnç kuvveti uygulayan elastik elemandır. Birçok yay elemanında, şeklinin değişimi ile buna karşılık uyguladığı kuvvet arasında doğrusal bir ilişki vardır ve Hooke Yasası'na uyduğu kabul edilir:

$$F = k x$$

Burada F direnç kuvveti, x uzama miktarı ve k yay sabitidir. Doğrusal olmayan bir yay için bu denklem geçerli değildir.

Çok çeşitli tiplerde yaylar vardır. Şekil 11'de temel tipleri gösteren bir şekil vardır(Springs,2010):



Şekil 11

Burada görülen yaylar kullanılacakları yere, yer kısıtlamasına vb. bağlı olarak farklı amaçlar için kullanılırlar.

Örneğin, tipik bir taşıt uygulaması için yüksek yay sabiti değerlerine ulaşabilen ve Şekil 12'de gösterilen yaylar kullanılmaktadır (Springs, 2010)

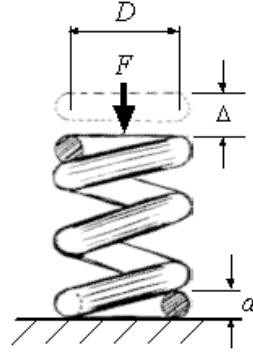
Laminated Leaf Spring



Şekil 12

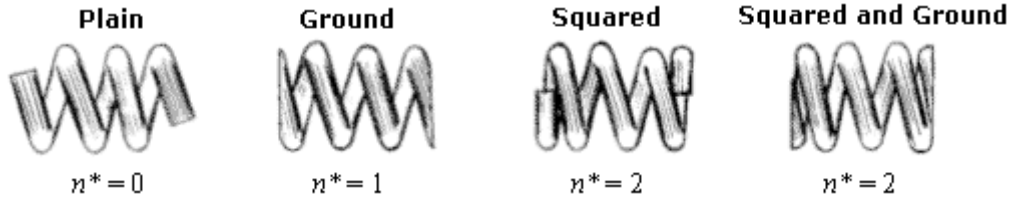
Bir yay sabiti her ne kadar Hooke Yasası'nda sabit olarak gösterilse de aslında birçok parametreye bağlıdır. Bu parametreler tasarımı etkileyen kalemleri oluştururlar.

Şekil 13'te bir yayın, yay katsayısına ilişkin parametrelerin, malzeme özellikleri de dikkate alındığında ortaya çıkacak etkenler gösterilmiştir (Spring Constant Dependencies,2010)



Şekil 13

Bu ifadeye  $G$  rijitlik modülü,  $n_a$  aktif sarım sayısı,  $D$  ve  $d$  teknik çizimde tanımlanan büyüklüklerdir. Sarım sayısı, toplam sarım miktarı ile yükü taşımada görev almayan sarım miktarının farkına eşittir. Bir yayda yükü taşımada aktif görev almayan sarım sayısı ( $n^*$ ), yayın nasıl sonlandığına bağlı olarak değişir. (Spring Constant Dependencies, 2010)



Şekil 14

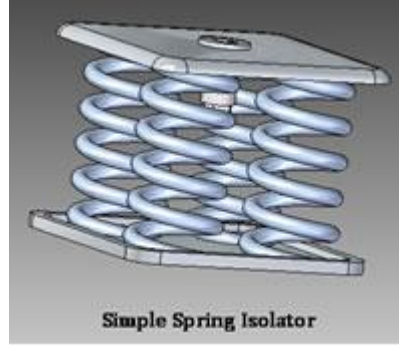
### b) Titreşim Yalıtıcıları

Titreşimler, çeşitli teknolojiler aracılığı ile yalıtılabilirler. Pasif yalıtımda, titreşime etkisi belirli bir limitte tutularak, birbirine bağlanan çiftlerden titreşim yapmayan titreşim yapandan yalıtılması sağlanır. Pasif yalıtımda bu iş mekanik bağlantılar ile sağlanır. Bu bağlantılar, titreşim enerjisini dağıtır veya yeniden yönlendirir. Araç olarak mekanik yaylar, akışkanlar, negatif-katılık elemanları kullanılır. Pasif sistemlerin, aktif sistemlere göre basitliği onları daha güvenilir ve tehlikesiz kılar.

En çok kullanılan pasif yalıtıcı yaydır. Yay titreşen eleman ile titreşim yapmayan eleman arasında konarak titreşim yapmayan elemanı bu titreşimden izole eder. Titreşim enerjisini emerek, kuvvetin geldiği yöne ters kuvvetle darbe verir. Akışkan veya elastik element, bu sisteme eklenerek, titreşen sistemin sönümünü sağlar. Titreşim enerjisi bu sırada

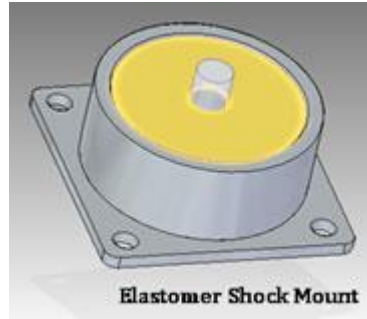
akışkan üzerinden ısı enerjisine çevrilir. Böylece enerjinin bir kısmı başka yere aktarılarak, titreşimin tamamının, titreşim yapmayan kısma gitmesi engellenir.

Şekil 15’te böyle bir sistem gösterilmiştir (Passive Vibration Isolation).



Şekil 15

Elastomerler, kauçuk gibi elastik maddelerdir. Bu malzemeler mekanik enerjiyi üzerlerine alarak deformatsyona uğrarlar. Elastomer örnekleri titreşim yapan montaj kısımlarına konulurlar. Otomobil motorları, uçak parçaları, endüstriyel makineler kullandıkları yerlerden bazılarıdır. Kauçuk her yönde aynı karakteristiği göstermediğinden, tek eksenli yalıtım için uygun bir araçtır. Şekil 16’da ise sönüm elemanı aracılığı ile titreşim etkisini gidermeye çalışan bir sistem gösterilmiştir (Passive Vibration Isolation).



Şekil 16

Pnömatik sistemler çok ağır platformlar ile yer düzlemini birbirlerinden hava pistonları aracılığı ile ayırırlar. Diğer bir deyişle örneğin masanın bacakları ile masa düzlemi arasında bir bağlantı yoktur. Masa bacakları hava pistonlarından oluşturulmuştur. Dahası masa düzlemi bu pistonların oluşturduğu hava üzerinde kaymaktadır. Yerden kaynaklanan tüm titreşim Etileri böyle bir sistem ile giderilebilmesine karşın pahalı bir çözümdür. Sürekli bakım ve kontrol isteyen dahası sürekli hava temini ihtşyacı duyan bir sistem olması bu sistemin diğer sorunlarıdır. Şekil 17’de böyle bir sistem görülmektedir (Passive Vibration Isolation) Bu sistemin bir benzeri İTÜ Mekatronik Araştırmaları Merkezi’nde görülebilir.



Şekil 17

### Referanslar

[1] Turhan, Ö., *Makina Teorisi III: Mekanik Titreşimler Ders Notları*.

[2] Springs. (2010). *Springs*. Erişim tarihi: 11 Mayıs 2010,  
[http://www.efunda.com/DesignStandards/springs/spring\\_introduction.cfm](http://www.efunda.com/DesignStandards/springs/spring_introduction.cfm)

[3] Spring Constant Dependencies. (2010). *Springs*. Erişim Tarihi : 11 Mayıs 2010,  
[http://www.efunda.com/DesignStandards/springs/spring\\_design.cfm](http://www.efunda.com/DesignStandards/springs/spring_design.cfm)

[4] Passive Vibration Isolation.(2010). Erişim Tarihi : 11 Mayıs 2010,  
[http://www.minusk.com/content/technology/passive\\_vibration\\_isolation\\_table\\_platform\\_bench\\_isolators.html](http://www.minusk.com/content/technology/passive_vibration_isolation_table_platform_bench_isolators.html)